Exercice 1. Répondre à chacune des questions suivantes en cochant la case correcte.

1. Soit $B = J_7(\lambda)$ un bloc de Jordan de taille 7. Que vaut $\delta_\lambda(2) = \dim\left(\mathrm{Ker}\left(B - \lambda \cdot \mathrm{I}_7\right)^2\right)$?
   - ☐ $\delta_\lambda(2) = 1$
   - ☐ $\delta_\lambda(2) = 2$
   - ☐ $\delta_\lambda(2) = 5$
2. Soit $J = J_m(\lambda)$ un bloc de Jordan de taille m. Est-ce que J est diagonalisable ?
   - ☐ Oui, toujours.
   - ☐ Oui, si $\lambda \neq 0$, mais non si $\lambda = 0$
   - ☐ Oui, si $m = 1$, non sinon.

Exercice 2. On note $\{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{C}^3$ et $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3\} \subset (\mathbb{C}^3)'$ la base canonique duale. On considère les vecteurs $\{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{C}^3$ définis par

$$v_1 = (1, 1, 1), \quad v_2 = (1, 0, -1), \quad v_3 = (0, 1, 1).$$

Vérifier que ces vecteurs forment une base de $\mathbb{C}^3$ et trouver la base $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \subset (\mathbb{C}^3)'$ duale de $\{v_1, v_2, v_3\}$.

Exercice 3. Soit V un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ (de dimension finie ou non) et $E \subset V$ un sous-ensemble non vide quelconque. Supposons que pour tout $x \in E$ il existe une forme linéaire $\varphi_x \in V'$ telle que pour tout $y \in E$ on a :

$$\varphi_x(y) \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = x.$$

Montrer qu'alors E est une famille libre. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4. Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soient $\alpha, \beta \in V'$ deux covecteurs non nuls tels que $\mathrm{Ker}(\alpha) \neq \mathrm{Ker}(\beta)$. Démontrer que $\dim(\mathrm{Ker}(\alpha) \cap \mathrm{Ker}(\beta)) = n - 2$.

Exercice 5. Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $x \in V$ un vecteur non nul. Prouver qu'il existe une forme linéaire $\theta \in V'$ telle que $\theta(x) \neq 0$.

À votre avis ce résultat est-il encore vrai pour un espace vectoriel de dimension infinie ?

Exercice 6. Soit V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Parmi les assertions suivantes, lesquelles sont correctes ?

a) Pour tout covecteur $\varphi \in V'$ on a $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = n - 1$.

b) Si $v \in V$ est un vecteur non nul, alors il existe un covecteur $\psi \in V'$ tel que $\psi(v) = 1$.

c) Étant donné $v \in V \setminus \{0\}$ fixé, il existe un covecteur $\psi \in V'$ non nul tel que $\psi(v) = 0$.

d) Soit $\mathcal{B} = (v_1, \cdots, v_n)$ une base de V. Soient $\psi_1, \cdots, \psi_n$ des formes linéaires sur V. Alors elles forment une base de V' si et seulement si la matrice $(\psi_i(v_j))_{1\leq i,j\leq n}$ est inversible.

e) On considère les formes linéaires sur $\mathbb{R}^3$ définies par $\varphi_1(x, y, z) = 3\,x - y + z$, $\varphi_2(x, y, z) = 3\,x + y + z$, $\varphi_3(x, y, z) = 3\,x - 3\,y + 2\,z$. Alors ces trois formes linéaires sont linéairement indépendantes.

f) Si V est de dimension n, pour tout sous-espace vectoriel $U \subset V$ de dimension $n - 1$, il existe $\varphi \in V'$ telle que $\mathrm{Ker}(\varphi) = U$.

Exercice 7. On a vu dans un exercice précédent que deux matrices congruentes ne sont pas toujours semblables. Qu'en-est-il de l'implication inverse : *Deux matrices semblables sont-elles toujours congruentes ?*

(Prouver cette affirmation ou donner un contre-exemple)

Exercice 8. On note $C^0(\mathbb{R})$ (ou $C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$) l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans lui-même. Pour chaque élément $a \in \mathbb{R}$ on note $\delta_a : C^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ la masse de Dirac en a définie par $\delta_a(f) = f(a)$.

1. Prouver que l'ensemble $\{\delta_a\}_{a\in\mathbb{R}} \subset C^0(\mathbb{R})'$ est une famille libre de l'espace vectoriel dual de $C^0(\mathbb{R})$.
2. Soit $-\infty < a < b < \infty$. Rappeler pourquoi l'intégration sur l'intervalle $[a, b]$ dénotée par $\mathrm{I}_{[a,b]}(f) = \int_a^b f(x)dx$ définit un élément du dual $C^0(\mathbb{R})'$.
3. Supposons à présent que $-\infty < a < b < c < \infty$. Les covecteurs $\mathrm{I}_{[a,b]}$, $\mathrm{I}_{[b,c]}$ et $\mathrm{I}_{[a,c]}$ sont-ils linéairement indépendants ?
4. (*) À votre avis, peut-on exprimer le covecteur $\mathrm{I}_{[a,b]}$ comme combinaison linéaire des covecteurs $\{\delta_a\}$? (Justifier votre réponse.)

Exercice 9. On peut définir deux formes bilinéaires sur l'espace des $m \times n$ matrices par les formules $\mathrm{Tr}(A^\top \cdot B)$ et $\mathrm{Tr}(A \cdot B^\top)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ (A, B) & \mapsto & \mathrm{Tr}(A^\top \cdot B) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \times \mathrm{M}_{m,n}(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ (A, B) & \mapsto & \mathrm{Tr}(A \cdot B^\top) \end{array}$$

Ces formes bilinéaires sont-elles égales ou différentes ?

Exercice 10. On sait du cours d'analyse que l'exponentielle d'une matrice carrée permet de résoudre les systèmes d'équations différentielles linéaires du premier degré. Grâce au théorème de la forme normale de Jordan, on peut ramener ce problème à l'étude de l'exponentielle des blocs de Jordan. C'est ce que nous faisons dans cet exercice.

Rappelons que l'exponentielle d'une matrice carrée $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est définie par la série exponentielle :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

(La convergence de cette somme est démontrée dans le cours d'analyse).

1. Trouver une formule pour $\exp(J_m)$ où $J_m = J_m(0)$ est un bloc de Jordan nilpotent d'ordre m (commencer par $m = 2, 3, 4$).
2. Montrer que si $AB = BA$, alors $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$.
3. Trouver une formule pour $\exp(J_m(\lambda))$ où $J_m(\lambda)$ est un bloc de Jordan de taille m avec valeur propre λ (commencer par $m = 2, 3, 4$).
4. (Exercice d'analyse supplémentaire) Sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, définissons la norme de Frobenius par

$$\|A\| = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^t A)}.$$

   (i) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme (c'est-à-dire, satisfait aux propriétés énoncées dans la Proposition 11.1.7 page 46 du polycopié).
   (ii) Montrer que $\|\cdot\|$ est multiplicative : pour tout $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \, .$$

   (iii) En déduire la convergence absolue de la série exponentielle associée à une matrice arbitraire $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.